## Aufgabe 70

Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Problems (exakte Differentialgleichung):

a) $(3\mathrm{x}^2 + y)dx + (x - 8y)dy = 0$

Eine exakte Differentialgleichung liegt vor wenn man eine DGL 1. Ordnung in symmetrischer Darstellung vorliegen hat und zusätzlich die Integrabilitätsbedingung gilt: $\mathrm{P_y}=\mathrm{Q_x}$, also:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \quad mit\ P_{\mathrm{y}} = Q_{\mathrm{x}}$$

In unserem Beispiel ist $P(x,y) = 3x^2 + y$ und $Q(x,y) = x - 8y$. Nun prüfen wir auf Exaktheit:

$$P_{\mathrm{y}} = 1$$
$$Q_{\mathrm{x}} = 1$$

Daraus folgt, die DGL ist exakt.
Die Lösung einer exakten Differentialgleichung ist die Stammfunktion F(x,y), für die gelten muss:

$$F_{\mathrm{x}}(x,y) = P$$
$$F_{\mathrm{y}}(x,y) = Q$$

Wie finden wir die Stammfunktion F(x,y)?

$F_{\mathrm{x}}(x,y) = P \Rightarrow$ F(x,y) = $\int Pdx$
oder
$F_{\mathrm{y}}(x,y) = Q \Rightarrow$ F(x,y) = $\int Qdy$

Verwenden wir die erste Beziehung in unserem Beispiel, erhalten wir:

$$F(x,y) = \int (3x^2 + y)dx = x^3 + xy + C(y)$$

Wie immer in unbestimmten Integralen, bekommen wir eine Konstante dazu, die hier von y abhängt, diese gilt es noch zu bestimmen. Dazu nehmen wir nun die zweite Beziehung $F_{\mathrm{y}}(x, y) = Q$ und leiten unsere erhaltene Stammfunktion nach y ab:

$$F_{\mathrm{y}}(x, y) = x + C_{\mathrm{y}}(y) \stackrel{!}{=} Q = x - 8y$$

Aus dieser Gleichung folgt $C_{\mathrm{y}}(y) = -8y$. Nun müssen wir noch C(y) bestimmen:

$$C(y) = \int C_{\mathrm{y}}(y)dy = -4y^2$$

$$F(x, y) = x^3 + xy - 4y^2$$

b) $\frac{y^2-2}{x^2}dx - \frac{2y}{x}dy = 0, \quad y(2) = 3$

$$P_{\mathrm{y}} = \frac{2y}{x^2}$$
$$Q_{\mathrm{x}} = \frac{2y}{x^2}$$

Die DGL ist also exakt.

$$F(x, y) = \int -\frac{2y}{x}dy = -\frac{y^2}{x} + C(x)$$

$$F_{\mathrm{x}}(x, y) = \frac{y^2}{x^2} + C_{\mathrm{x}}(x) \stackrel{!}{=} P = \frac{y^2 - 2}{x^2}$$

$$C(x) = \int -\frac{2}{x^2}dx = \frac{2}{x}$$

$$F(x, y) = \frac{2 - y^2}{x}$$

$$F(2, 3) = \frac{2 - 3^2}{2} = -\frac{7}{2}$$

## Aufgabe 71

Ermitteln Sie zu folgenden Differentialgleichungen passende integrierende Faktoren und bestimmen Sie damit die Lösung:

a) $(5x + 9y^2 + 2)dx + 12y(x + 1)dy = 0$

$$P_{\mathrm{y}} = 18y$$
$$Q_{\mathrm{x}} = 12y$$

Die DGL ist also (noch) nicht exakt.

Wir bestimmen den sog. Eulerschen-Multiplikator $\mu$ (integrierender Faktor), mit dem die DGL exakt wird:

$$\mu P dx + \mu Q dy = 0$$

Der Multiplikator errechnet sich folgendermaßen:

$$\mu = \exp^{\int G(x)dx} \;\; \textit{wenn}\ G(x) = \frac{P_{\mathrm{y}} - Q_{\mathrm{x}}}{Q}$$
$$\mu = \exp^{\int G(y)dy} \;\; \textit{wenn}\ G(y) = \frac{Q_{\mathrm{x}} - P_{\mathrm{y}}}{P}$$

Im ersten Fall ist G nur eine Funktion von x, und im zweiten Fall nur eine Funktion von y.

$$G(x) = \frac{P_{\mathrm{y}} - Q_{\mathrm{x}}}{Q} = \frac{1}{2(x + 1)}$$

$$\mu = e^{\int \frac{1}{2(x+1)} dx} = \sqrt{x+1}$$

Mit $\tilde{P} = \mu P$ und $\tilde{Q} = \mu Q$ sollte die DGL nun exakt sein.

$$\tilde{P}_{\mathrm{y}} = 18y\sqrt{x+1}$$
$$\tilde{Q}_{\mathrm{x}} = 18y\sqrt{x+1}$$
$$\checkmark$$

Die Lösung erfolgt nun wie in Beispiel 70.

$$F(x,y) = \int 12y(x+1)^{3/2} dy = 6y^2(x+1)^{3/2} + C(x)$$

$$F_{\mathrm{x}}(x,y) = 9y^2(x+1)^{1/2} + C_{\mathrm{x}}(x) \stackrel{!}{=} P = (5x + 9y^2 + 2)(x+1)^{1/2}$$

$$C(x) = \int (5x+2)(x+1)^{1/2} dx = 2x(x+1)^{3/2}$$

$$F(x,y) = 6y^2(x+1)^{3/2} + 2x(x+1)^{3/2} = (6y^2 + 2x)(x+1)^{3/2}$$

b) $3x^2dx + (y - x^3 - 1)dy = 0$

$$P_{\mathrm{y}} = 0$$
$$Q_{\mathrm{x}} = -3x^2$$

$$G(y) = \frac{-3x^2}{3x^2)} = -1$$

$$\mu = e^{\int -1 dx} = e^{-y}$$

$$F(x,y) = \int 3x^2 e^{-y} dx = x^3 e^{-y} + C(y)$$

$$F_{\text{y}}(x,y) = -x^3 e^{-y} + C_{\text{y}}(y) \stackrel{!}{=} Q = e^{-y}(y - x^3 - 1)$$

$$C(y) = \int C_{\text{y}}(y) dy = \int e^{-y}(y-1) dy = -ye^{-y}$$

$$F(x,y) = x^3 e^{-y} - ye^{-y}$$

## Aufgabe 72

Bestimmen Sie näherungsweise den Funktionswert y(2) der Lösung des Anfangswertproblems:

$y' = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{y}, \quad y(1) = 0.75$

mit der Schrittweite h = 0.25 (unter Berücksichtigung von 3 Nachkommastellen) einmal

a) mit Euler Polygonzugverfahren

$$\begin{aligned} x_{\text{n}} &= x_{\text{n-1}} + h \\ y_{\text{n}} &= y_{\text{n-1}} + h \cdot f(x_{\text{n-1}}, y_{\text{n-1}}) \\ n &\geq 1 \end{aligned}$$

Die Formeln angewendet bringen folgendes Ergebnis:

Der wahre Wert ist: y(2) = 1.5186.

| n | $x_n$ | $y_n$ |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 0,75 |
| 1 | 1,25 | 0,8870 |
| 2 | 1,5 | 1,0517 |
| 3 | 1,75 | 1,2460 |
| 4 | 2 | 1,4709 |

b) mit Runge Kutta Verfahren
Wir verwenden die allgemeinen Rekursionsformeln für das Runge Kutta Verfahren aus den Vorlesungsfolien 'Gewöhnliche Differentialgleichungen'. Wir starten mit $x_0 = 1$ und $y_0 = 0.75$. Damit ergeben sich für die K-Werte, x und y:

| i | 1 | 2 | 3 | 4 | $K^{(n)}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $K_i^{(0)}$ | 0,5482 | 0,6005 | 0,5969 | 0,5569 | 0,5833 |
| $K_i^{(1)}$ | 0,6543 | 0,7114 | 0,7078 | 0,6644 | 0,6929 |
| $K_i^{(2)}$ | 0,7688 | 0,8286 | 0,8252 | 0,7787 | 0,8092 |
| $K_i^{(3)}$ | 0,8880 | 0,9493 | 0,9460 | 0,8971 | 0,9293 |

| n | $x_n$ | $y_n$ |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 0,75 |
| 1 | 1,25 | 0,8958 |
| 2 | 1,5 | 1,069 |
| 3 | 1,75 | 1,2713 |
| 4 | 2 | 1,5037 |

Der erhaltene Wert $y(2) = 1.5037$ weicht vom wahren Wert $y(2) = 1.5186$ - wie zu erwarten - weniger ab als in Aufgabe 72a.

## Aufgabe 73

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen:

a) $\ddot{x} + 3\dot{x} = 1 + 3t^2$

Das ist eine inhomogene lineare DGL mit konstanten Koeffizienten. Zur Lösung der DGL wird folgender Ansatz gewählt:

$$x(t) = Ce^{\lambda t}$$

Homogene Lösung:
Diesen Ansatz leiten wir nun einfach ab und setzen ihn in die DGL ein, wobei die Störfunktion erstmal Null gesetzt wird:

$$\lambda^2 Ce^{\lambda t} + 3\lambda Ce^{\lambda t} = 0$$

$$\lambda^2 + 3\lambda = 0 \ \ (\textit{charakteristische Gleichung})$$

Lösen der Gleichung nach $\lambda$ bringt:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= -3 \end{aligned}$$

Die homogene Lösung der DGL ist nun einfach:

$$x_\mathrm{h} = C_1 + C_2 e^{-3t}$$

Für die inhomogene Lösung wählen wir einen geeigneten Ansatz für unsere Störfunktion $s(t) = 1 + 3t^2$ Da der additive Teil 1 der Störfunktion auch eine Lösung der homogenen DGL ist ($\mathrm{C}_1$), liegt äußere Resonanz vor. Diese müssen wir beim Wählen eines geeigneten Ansatzes berücksichtigen.
Ansatz aus Tabelle + Äußere Resonanz:

$$x_\mathrm{in}(t) = (b_0 + b_1 t + b_2 t^2)t$$

Wieder 2 mal ableiten und in die DGL einsetzen:

$$(2b_1 + 6b_2 t + 3(b_0 + 2b_1 t + 3b_2 t^2) = 1 + 3t^2$$

Nun müssen wir nur noch einen Koeffizientenvergleich machen:

$$\begin{aligned} 2b_1 + 3(b_0) &= 1 \\ 6b_2 + 2b_1 &= 0 \\ 3b_2 &= 3 \end{aligned}$$

$$b_0 = \frac{5}{9}; \quad b_1 = -\frac{1}{3}; \quad b_2 = \frac{1}{3}$$

Damit lautet die inhomogene Lösung:

$$x_{\text{in}}(t) = (\frac{5}{9} - \frac{1}{3}t + \frac{1}{3}t^2)t$$

Und die allgemeine Lösung der DGL ist eine Linearkombination aus homogener und inhomogener Lösung:

$$x(t) = x_{\text{h}}(t) + x_{\text{in}}(t) = C_1 + C_2 e^{-3t} + \frac{5t}{9} - \frac{t^2}{3} + \frac{t}{3}$$

Als Probe könnte man die allgemeine Lösung einfach ableiten und in die DGL einsetzen und probieren ob die richtige Störfunktion rauskommt.

b) $y'' - y' - 2y = e^{2x} cos(x)$
Homogene Lösung gleich wie in Beispiel a) zu lösen:

$$\lambda^2 C e^{\lambda t} - \lambda C e^{\lambda t} - 2C e^{\lambda t} = 0$$

Lösen der Gleichung nach $\lambda$ bringt:

$$\lambda_1 = -1$$
$$\lambda_2 = 2$$

Die homogene Lösung der DGL ist:

$$y_{\text{h}}(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$$

Für die inhomogene Lösung wählen wir wieder einen Ansatz aus der Tabelle:

$$y_{\text{in}}(x) = e^{2x}(b_0 sin(x) + b_1 cos(x))$$

Ableiten und einsetzen bringt folgenden Koeffizientenvergleich:

$$b_0 = \frac{3}{10}; \quad b_1 = -\frac{1}{10}$$

Die allgemeine Lösung der DGL lautet also:

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + \frac{3}{10} e^{2x} sin(x) - \frac{1}{10} e^{2x} cos(x))$$

c) $\ddot{x} - 6\dot{x} + 10x = 2e^t cos(t)$

Homogene Lösung lautet (wobei im letzten Schritt die eulersche Formel verwendet wurde):

$$x_h(t) = C_1^* e^{(3+i)t} + C_2^* e^{(3-i)t} = C_1 e^{3t} cos(t) + C_2 e^{3t} sin(t)$$

Der Ansatz für die Störfunktion ist der selbe wie in Beipiel b). Koeffizientenvergleich liefert:

$$x_{\text{in}}(t) = e^t(b_0 sin(t) + b_1 cos(t))$$

$$b_0 = -\frac{1}{4}; \quad b_1 = \frac{1}{4}$$

Die allgemeine Lösung lautet nun:

$$x(t) = C_1 e^{3t} cos(t) + C_2 e^{3t} sin(t) - \frac{1}{4} e^t sin(t) + \frac{1}{4} e^t cos(t)$$

d) $y'' + 10y' + 25y = xsin(x)$
Da die charakteristische Gleichung eine doppelte Nullstelle besitzt ($\lambda_{1,2} = -5$) liegt innere Resonanz vor. Deshalb ist ein Teil der homogenen Lösung mit x zu multiplizieren:

$$y_h(x) = C_1 x e^{-5x} + C_2 e^{-5x}$$

Der Ansatz für die Störfunktion lautet:

$$y_{\text{in}}(x) = (b_0 + b_1 x) sin(x) + (c_0 + c_1 x) cos(x)$$

Ableiten, einsetzen und Koeffizientenvergleich liefert die Konstanten $b_0, b_1, c_0$ *und* $c_1$. Die inhomogene Lösung lautet dann:

$$y_{\text{in}}(x) = \frac{6}{169} xsin(x) - \frac{55}{4394} sin(x) - \frac{5}{338} xcos(x) + \frac{37}{4394} cos(x)$$

Allgemeine Lösung:

$$y(x) = y_h(x) + y_{\text{in}}(x)$$

## Aufgabe 74

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen:

a) $y'' - 2y' - 3y = e^x(3x - 8)$

Homogene Lösung:

$$y_h(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$$

Ansatz für die Störfunktion:

$$y_{\text{in}}(x) = e^x(b_0 + b_1 x)$$

Ableiten, einsetzen und Koeffízientenvergleich liefert:

$$b_0 = 2; \quad b_1 = -\frac{3}{4}$$

Somit lautet die inhomogene Lösung:

$$y_{\text{in}}(x) = -\frac{3}{4} x e^x + 2e^x$$

Allgemeine Lösung:

$$y(x) = y_h(x) + y_{\text{in}}(x)$$

b) $y'' + 4y' = -12cos(2x) - 4sin(2x)$

Homogene Lösung:

$$y_h(x) = C_1 e^{-4x} + C_2$$

Ansatz für die Störfunktion:

$$y_{\text{in}}(x) = b_0 sin(2x) + b_1 cos(2x)$$

Ableiten, einsetzen und Koeffízientenvergleich liefert:

$$b_0 = -1; \quad b_1 = 1$$

Somit lautet die inhomogene Lösung:

$$y_{\text{in}}(x) = -sin(2x) + cos(2x)$$

Allgemeine Lösung:

$$y(x) = y_h(x) + y_{\text{in}}(x)$$

c) $y'' - 4y' + 4y = 1 - e^{2x}$

Homogene Lösung (mit innerer Resonanz):

$$y_h(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$$

Wen für die Störfunktion eine Summe verschiedener Störfunktionen vorliegt, dann sind auch die Ansätze einfach zu addieren. Das ist in diesem Beispiel der Fall. Außerdem liegt äußere Resonanz vor - dabei ist nur der Teil mit x zu multiplizieren für den auch die äußere Resonanz vorliegt! Außerdem WICHTIG: wenn innere **und** äußere Resonanz vorliegt, wird der Term mit äußerer Resonanz nicht nur einmal mit x multipliziert, sondern k-mal, wenn die Nullstelle der charakteristischen Gleichung k-mal entartet ist. In unserem Fall ist $\lambda = 2$, 2-fach entartet. Also multiplizieren wir den Ansatz für die Störfunktion für die Resonanz vorliegt mit $x^2$.

Der Ansatz für die Störfunktion lautet also:

$$y_{\text{in}}(x) = b_0 + c_0 x^2 e^{2x}$$

Ableiten, einsetzen und Koeffízientenvergleich:

$$b_0 = \frac{1}{4}; \quad c_0 = -\frac{1}{2}$$

Somit lautet die inhomogene Lösung:

$$y_{\text{in}}(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} x^2 e^{2x}$$

Allgemeine Lösung:

$$y(x) = y_h(x) + y_{\text{in}}(x)$$

d) $x^2 y'' + 3xy' + y = 0$

Eulersche Differentialgleichung, siehe Aufgabe 75.

## Aufgabe 75

Lösen Sie folgende Eulersche Differentialgleichung:

$y'' - \frac{6}{x^2} y = 36x^2 ln(x)$

Auf diese Aufgabe wird verzichtet da sie nicht prüfungsrelevant ist. Besonders Interessierte möchte ich auf das Kapitel 6.3.6 im Skript verweisen.

## Aufgabe 76

Berechnen Sie die Lösungen der Differentialgleichungssysteme von der Form $\dot{\vec{x}} = A \cdot \vec{x}$ mit den folgenden Systemmatrizen A:

a) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -10 & 4 \end{pmatrix}$

Wie in den Vorlesungsfolien (Gewöhnliche Differentialgleichungen) beschrieben, besteht die homogene Lösung aus $\vec{x} = \vec{C}e^{\lambda t}$ mit $\vec{C}$ und $\lambda$ dem Eigenvektor der Systemmatrix und dem dazugehörigen Eigenwert.
Die Eigenwerte der Matrix lauten:

$$\lambda_1 = -1 \; und \; \lambda_2 = 4$$

Zu $\lambda_1$ finden wir den Eigenvektor $\vec{v_1}$ und zu $\lambda_2$ den Eigenvektor $\vec{v_2}$:

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \; und \; \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Da wir zwei Eigenwerte des 2x2-Systems, mit 2 linear unabhängigen Eigenvektoren rausbekommen besteht die homogene Lösung einfach aus einer Linearkombination dieser Lösungen:

$$x(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}$$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ Eigenwerte:

$$\lambda_1 = 1 - 2i \; und \; \lambda_2 = 1 + 2i$$

Wir bekommen komplexe Eigenwerte mit denen wir ganz normal weiterrechnen können. Die Eigenvektoren dazu lauten:

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} i \\ 2 \end{pmatrix} \; und \; \vec{v_2} = \begin{pmatrix} -i \\ 2 \end{pmatrix}$$

Die homogene Lösung ist dann also wieder durch eine Linearkombination gegeben:

$$x(t) = C_1 \begin{pmatrix} i \\ 2 \end{pmatrix} e^{(1-2i)t} + C_2 \begin{pmatrix} -i \\ 2 \end{pmatrix} e^{(1+2i)t}$$

Mit der eulerschen Formel lässt sich dieses Ergebnis noch umschreiben zu:

$$x(t) = C_1 \begin{pmatrix} cos(2t) \\ -2sin(2t) \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} sin(2t) \\ 2cos(2t) \end{pmatrix} e^t$$

c) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

Eigenwert ist hier zweifach (n-fach) entartet:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

Das bedeutet das die homogene Lösung nun als Linearkombination von folgender Form gegeben ist:

$$\vec{x}_h(t) = \vec{P}(t)e^{\lambda t}$$

wobei  ein Polynom n-ten Grades ist, dessen Konstanten noch zu bestimmen sind: Um die Konstanten zu bestimmen muss der folgende Ansatz einmal abgeleitet und einmal nicht abgeleitet in die ursprüngliche DGL eingesetzt werden.

$$\vec{x}_h(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} a + bt \\ c + dt \end{pmatrix} ; \; \dot{\vec{x}}_h(t) = \lambda e^{\lambda t} \begin{pmatrix} a + bt \\ c + dt \end{pmatrix} + e^{\lambda t} \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

$$\lambda e^{\lambda t} \begin{pmatrix} a + bt \\ c + dt \end{pmatrix} + e^{\lambda t} \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} e^{\lambda t} \begin{pmatrix} a + bt \\ c + dt \end{pmatrix}$$

$$\lambda \begin{pmatrix} a + bt \\ c + dt \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a + 3bt - c - dt \\ 4a + 4bt - c - dt \end{pmatrix}$$

Nun müssen wir noch $\lambda$ einsetzen und einen Koeffizientenvergleich machen:

$$\begin{pmatrix} a + bt + b \\ c + dt + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a + 3bt - c - dt \\ 4a + 4bt - c - dt \end{pmatrix}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} a + b &= 3a - c \\ b &= 3b - d \\ c + d &= 4a - c \\ d &= 4b - d \end{aligned}$$

Da nur zwei der vier Gleichungen linear unabhängig sind, können wir 2 Variablen frei wählen:

$$a = C_1; \quad b = C_2$$

Dann folgt für c und d:

$$c = 2C_1 - C_2; \quad d = 2C_2$$

Dies müssen wir jetzt nur in den Ansatz zurückeinsetzen, dann haben wir die homogene Lösung gefunden:

$$\vec{x}_h(t) = e^t \begin{pmatrix} C_1 + C_2 t \\ 2C_1 - C_2 + 2C_2 t \end{pmatrix};$$

## Aufgabe 77

Berechnen Sie die Lösungen der Differentialgleichungssysteme von der Form $\dot{\vec{x}} = A \cdot \vec{x}$ mit den folgenden Systemmatrizen A:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

Lösungweg ist der gleiche wie in 76,a)

Die Eigenwerte der Matrix lauten:

$$\lambda_1 = -2 \; und \; \lambda_2 = 6$$

Die Eigenvektoren:

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \; und \; \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Lösung ist dann:

$$x(t) = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{6t}$$

b) $\begin{pmatrix} 11 & -25 \\ 4 & -9 \end{pmatrix}$

Wieder ein 2-fach entarteter Eigenwert:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

Der dazugehörige Eigenvektor lautet:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Der Lösungweg ist der selbe wie in 76,c)

## Aufgabe 78

Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\vec{x}(t=0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Die Lösung erfolgt wie bei 2x2 Systemen. Zuerst berechnen wir Eigenwerte und Eigenvektoren:

$$\lambda_1 = 0;\ \lambda_2 = -1;\ \lambda_3 = 3$$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix};\ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};\ \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die allgemeine Lösung des DGL-Systems ist dann:

$$\vec{x}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + C_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$$

Die spezielle Lösung erhalten wir, wenn wir noch die gegebenen Anfangswerte einsetzen und die Konstanten C bestimmen.

$$\vec{x}(t=0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^0 + C_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^0$$

Wir erhalten:

$$\begin{aligned} 2C_1 + C_2 - C_3 &= 2 \\ -2C_1 - 2C_3 &= 0 \\ C_1 + C_2 + C_3 &= -1 \end{aligned}$$

$$C_1 = 1;\ C_2 = -1;\ C_3 = -1$$

Die spezielle Lösung lautet also:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} - \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \vec{x}(t=0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Eigenwerte & Eigenvektoren:

$$\lambda_1 = 1;\ \lambda_2 = -1;\ \lambda_3 = 4$$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};\ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix};\ \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Allgemeine Lösung:

$$\vec{x}(t) = C_1 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + C_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}$$

Spezielle Lösung:

$$\vec{x}(t=0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{0} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{0} + C_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{0}$$

Wir erhalten:

$$
\begin{aligned}
-4C_1 + 2C_2 + 2C_3 &= 0 \\
2C_2 - 3C_3 &= -1 \\
C_1 + C_2 + C_3 &= 3
\end{aligned}
$$

$$C_1 = 1;\ C_2 = 1;\ C_3 = 1$$

Spezielle Lösung:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}$$

## Aufgabe 79

Gesucht ist die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems:

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 4t \\ -4t \end{pmatrix}$$

Im Gegensatz zu den vorherigen Beispielen handelt es sich hier um ein inhomogenes System von Differentialgleichungen.
Zuerst bestimmen wir die homogene Lösung, also mit:

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \vec{x}$$

Eigenwerte & Eigenvektoren:

$$\lambda_1 = 1;\ \lambda_2 = 5$$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix};\ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

Die homogene Lösung ist also:

$$\vec{x}_h(t) = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}$$

Für die inhomogene Lösung, müssen wir für die Störfunktion einen geeigneten Ansatz wählen. Wir gehen dabei gleich vor wie bei einzelnen Differentialgleichungen, nur müssen wir im System, den selben Ansatz für jede Differentialgleichung wählen. Der Ansatz lautet für die gegebene Störfunktion also:

$$\vec{x}_{in}(t) = \begin{pmatrix} At + B \\ Ct + D \end{pmatrix}$$

Diesen Ansatz leiten wir einmal ab und setzen ihn in das DGL-System ein:

$$\dot{\vec{x}}_{in}(t) = \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} At + B \\ Ct + D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4t \\ -4t \end{pmatrix}$$

Das multiplizieren wir nun aus:

$$\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3B + 2D + 3At + 2Ct \\ 2B + 3D + 2At + 3Ct \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4t \\ -4t \end{pmatrix}$$

Koeffizientenvergleich liefert:

$$\begin{aligned} A - 3B - 2D &= 0 \\ -3A - 2C &= 4 \\ C - 2B - 3D &= 0 \\ -2A - 3C &= -4 \end{aligned}$$

Das ergibt die Koeffizienten:

$$A = B = -4; \; C = D = 4$$

Somit lautet die inhomogene Lösung:

$$x_{in}(t) = \begin{pmatrix} -4t - 4 \\ 4t + 4 \end{pmatrix}$$

Die allgemeine Lösung ist dann gegeben durch:

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_h(t) + \vec{x}_{in}(t)$$

## Aufgabe 80

Man ermittle die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$$

Analog zu Aufgabe 79 bestimmen wir zuerst die homogene Lösung:

$$\vec{x}_h(t) = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$$

Nun wählen wir wieder den selben Ansatz wie in Aufgabe 79 und setzen ihn wieder in die DGL ein:

$$\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} At + B \\ Ct + D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$$

Das multiplizieren wir wieder aus:

$$\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2B + D + 2At + Ct \\ B + 2D + At + 2Ct \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$$

Koeffizientenvergleich liefert die Koeffizienten A, B, C, D:

$$A = \frac{1}{3};\; B = D = -\frac{2}{9}\; C = -\frac{2}{3}$$

Das führt auf die inhomogene Lösung:

$$x_{in}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}t - \frac{2}{9} \\ -\frac{2}{3}t - \frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

Die allgemeine Lösung ist wie immer gegeben durch:

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_h(t) + \vec{x}_{in}(t)$$

## Aufgabe 81

Wenden Sie auf folgende Funktionen die LAPLACE-Transformation an

a) $f_1(t) = t^2(t+4)(3t+4)$

Die Laplace-Transformation von f(t) ist durch:

$F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t, \qquad s \in \mathbb{C}$

definiert, sofern das Integral existiert.

Für die Laplacetransformation gibt es verschiedene Ansätze zur Lösung, das Integral selbst wird eher selten ausgeführt. Wir nutzen für die Transformation, Beziehungen in Linearität, Ähnlichkeit, Dämpfung und so weiter. Die Transformation wird also mittels Tabelle durchgeführt.

In unserem Beispiel ist es am einfachsten wir multiplizieren die Terme aus:

$$f_1(t) = 3t^4 + 16t^3 + 16t^2$$

Wir nutzen dann die Linearität:
$\mathcal{L}[\mathrm{a}_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$

$$\mathcal{L}[3t^4 + 16t^3 + 16t^2] = 3\mathcal{L}[t^4] + 16\mathcal{L}[t^3] + 16\mathcal{L}[t^2]$$

Die Laplacetransformierte von $t^n$ ist laut Tabelle gegeben mit:

$$\mathcal{L}[t^n](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

Also ist die Lösung:

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{72}{s^5} + \frac{96}{s^4} + \frac{32}{s^3}$$

b) $f_2(t) = (t^2 + 16t + 32)e^{\frac{t}{4}}$ In diesem Beispiel nutzen wir neben der Linearität auch den Dämpfungssatz:

$$\mathcal{L}[e^{-at} \cdot f(t)](s) = F(s+a) \; mit \; a \in \mathbb{C} \; und \; \mathcal{L}[f(t)](s) = F(s)$$

$$\mathcal{L}[(t^2+16t+32)e^{\frac{t}{4}}] = \mathcal{L}[t^2e^{\frac{t}{4}}] + 16\mathcal{L}[te^{\frac{t}{4}}] + 32\mathcal{L}[e^{\frac{t}{4}}]$$

Wobei wir zuerst nur die Laplacetransformation von f(t) bilden und dann das Ergebnis noch verschieben:

$$\mathcal{L}[t^2] + 16\mathcal{L}[t] + 32\mathcal{L}[1] = \frac{2}{s^3} + \frac{16}{s^2} + \frac{32}{s}$$

Das wäre das Ergebnis ohne den e-Term. Der Term $e^{\frac{t}{4}}$ verschiebt die Lösung um s nun noch um $-\frac{1}{4}$:

$$\mathcal{L}[f_2(t)](s) = \frac{2}{(s-\frac{1}{4})^3} + \frac{16}{(s-\frac{1}{4})^2} + \frac{32}{(s-\frac{1}{4})}$$

c) $f_3(t) = (3\cos 3t - 2\sin 3t)e^{-2t}$

In diesem Beispiel nutzen wir zwei weitere Relationen aus der Tabelle, und zwar:

$$\mathcal{L}[sin(\omega t)](s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \quad und \quad \mathcal{L}[cos(\omega t)](s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

Die Konstanten ziehen wir wieder nach vorne, mit der Linearität und der Verschiebung (Dämpfungssatz) erhalten wir:

$$3\mathcal{L}[cos(3t)e^{-2t}](s) - 2\mathcal{L}[sin(3t)e^{-2t}](s) = \frac{3(s+2)}{(s+2)^2+9} - \frac{6}{(s+2)^2+9} = \frac{3s}{s^2+4s+13}$$

## Aufgabe 82

Bestimmen Sie die inverse LAPLACE-Transformierte der folgenden Funktionen

a) $F_1(s) = \frac{1}{s^3} + \frac{4}{3s+2}$
Nun müssen wir von der Laplace Transformierten wieder zurücktransformieren. Dazu schreiben wir den Term durch Ergänzen am besten um, sodass wir eine bekannte Laplace Transformierte vorliegen haben:

$$F_1(s) = \frac{1}{s^3} + \frac{4}{3s+2} = \frac{1}{2}\frac{2}{s^3} + \frac{4}{3}\frac{1}{s+2}$$

Der erste Term ist einfach, und der zweite Term ist um s um 2 verschoben (also Dämpfungssatz):

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s+a)](t) = e^{-at} \cdot f(t)$$

So ist nun:

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{2}{s^3}](t) = t^2 \; und \; \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s+2}](t) = e^{-2t}$$

Damit folgt die Lösung:

$$\mathcal{L}^{-1}[F_1(s)](t) = \frac{1}{2}t^2 + \frac{4}{3}e^{-2t}$$

b) $F_2(s) = \frac{s+4}{s^2+11}$

Auch in diesem Beispiel bringen wir die Funktion auf eine bekannte Laplace Transformierte:

$$F_2(s) = \frac{s+4}{s^2+11} = \frac{s}{s^2+11} + \frac{4}{s^2+11} = \frac{s}{s^2+11} + \frac{4}{\sqrt{11}}\frac{\sqrt{11}}{s^2+11}$$

Damit liegen wieder folgende 2 Fälle vor:

$$\mathcal{L}[sin(\omega t)](s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \quad und \quad \mathcal{L}[cos(\omega t)](s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

Die inverse Laplace Transformierte von $F_2(s)$ lautet also:

$$\mathcal{L}^{-1}[F_2(s)](t) = cos(\sqrt{11}t) + \frac{4}{\sqrt{11}}sin(\sqrt{11}t)$$

c) $F_3(s) = \frac{2}{s^2+4s+13}$

Hier bringen wir den Nenner durch quadratisches Ergänzen auf eine uns bekannte Form:

$$F_3(s) = \frac{2}{s^2+4s+13} = \frac{2}{(s^2+4s+4)+9} = \frac{2}{3}\frac{3}{(s+2)^2+3^2}$$

Die inverse Laplace Transformation liefert dann mit dem Dämpfungssatz und der uns bereits bekannten sin-Transformation also:

$$\mathcal{L}^{-1}[F_3(s)](t) = \frac{2}{3}sin(3t)e^{-2t}$$

## Aufgabe 83

Bestimmen Sie mittels Partialbruchzerlegung

a) $\mathcal{L}^{-1}\ \{\frac{4s^3+s+3}{s(s+1)(s^2+1)}\}$

Die Partialbruchzerlegung sollte bereits beherrscht werden, der Ansatz für die PBZ lautet:

$$\frac{4s^3+s+3}{s(s+1)(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{Cs+D}{s^2+1}$$

Ausmultiplizieren und folgender Koeffizientenvergleich liefert die Konstanten:

$$A = 3; \quad B = 1; \quad C = 0; \quad D = -1$$

Somit haben wir den Bruch zerlegt:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{4s^3+s+3}{s(s+1)(s^2+1)}\} = \mathcal{L}^{-1}[\frac{3}{s} + \frac{1}{s+1} - \frac{3}{s^2+1}]$$

Nun ist es einfach die inverse Transformation zu bestimmen, zuerst umschreiben:

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{3}{s} + \frac{1}{s+1} - \frac{3}{s^2+1}] = \mathcal{L}^{-1}[3\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} - 3\frac{1}{s^2+1}]$$

Mit dem Dämpfungssatz und der sin-Relation lautet die Lösung dann:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{4s^3+s+3}{s(s+1)(s^2+1)}\} = 3 + e^{-t} - 3sin(t)$$

b) $\mathcal{L}^{-1}\ \{\frac{s^2+2}{s(s-2)^3}\}$ Ansatz für PBZ lautet:

$$\frac{s^2+2}{s(s-2)^3} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{(s-2)^2} + \frac{D}{(s-2)^3}$$

Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich liefert die Konstanten:

$$A = -\frac{2}{8}; \quad B = \frac{1}{4}; \quad C = \frac{1}{2}; \quad D = 3$$

Das führt zu:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s^2+2}{s(s-2)^3}\} = -\frac{2}{8}\frac{1}{s} + \frac{1}{4}\frac{1}{s-2} + \frac{1}{2}\frac{1}{(s-2)^2} + \frac{3}{(s-2)^3}$$

Das schreiben wir um auf eine Form die uns bekannter erscheint:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s^2+2}{s(s-2)^3}\} = -\frac{2}{8}\frac{1}{s} + \frac{1}{4}\frac{1}{s-2} + \frac{1}{2}\frac{1}{(s-2)^2} + \frac{3}{2}\frac{2}{(s-2)^3}$$

Mittels Dämpfungssatz und Linearitätsbeziehung bringt uns das auf folgende einfache Lösung:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s^2+2}{s(s-2)^3}\} = -\frac{2}{8} + \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{2}te^{2t} + \frac{3}{2}t^2e^{2t}$$

## Aufgabe 84

Man bestimme $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2se^{-4s}-e^{-s}}{s^2-9}\right\}$

In diesem Beispiel benötigen wir die Heaviside-Funktion, für deren Laplacetransformation gilt nämlich:

$$\mathcal{L}[H(t-b)f(t-b)](s) = e^{-bs}F(s) \quad für\ s \geq 0$$

bzw.

$$\mathcal{L}^{-1}[e^{-bs}F(s)](t) = H(t-b)f(t-b)$$

Als erstes zerlegen wir den Bruch:

$$\frac{2se^{-4s}-e^{-s}}{s^2-9} = 2e^{-4s}\frac{s}{(s+3)(s-3)} - e^{-s}\frac{1}{(s+3)(s-3)}$$

Partialbruchzerlegung führt zu:

$$2e^{-4s}\frac{s}{(s+3)(s-3)} - e^{-s}\frac{1}{(s+3)(s-3)} = 2e^{-4s}\frac{1}{2}(\frac{1}{s+3} + \frac{1}{s-3}) - e^{-s}\frac{1}{6}(\frac{1}{s-3} - \frac{1}{s+3})$$

Ohne den Exponentialfunktions-Termen hätten wir folgende Lösung:

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s+3} + \frac{1}{s-3} + \frac{1}{6}\frac{1}{s+3} - \frac{1}{6}\frac{1}{s-3}](t) = e^{-3t} + e^{3t} + \frac{1}{6}e^{-3t} - \frac{1}{6}e^{3t}$$

Mit den Exponentialfunktionen allerdings müssen wir nun für t, (t-b) substituieren und zusätzlich die Heavisidefunktion berücksichtigen:

$$\mathcal{L}^{-1}[e^{-4s}\frac{1}{s+3} + e^{-4s}\frac{1}{s-3} + \frac{1}{6}2e^{-s}\frac{1}{s+3} - \frac{1}{6}2e^{-s}\frac{1}{s-3}](t) =$$
$$H(t-4)e^{-3(t-4)} + H(t-4)e^{3(t-4)} + \frac{1}{6}H(t-1)e^{-3(t-1)} - \frac{1}{6}H(t-1)e^{3(t-1)}$$

Wobei das nun schon die entgültige Lösung ist.

## Aufgabe 85

Gesucht ist die inverse LAPLACE-Transformierte der Funktionen

a) $F(s) = \frac{4s+1}{s^2+9}$

Umschreiben liefert:

$$F(s) = \frac{4s+1}{s^2+9} = 4\frac{s}{s^2+9} + \frac{1}{3}\frac{3}{s^2+9}$$

Die inverse Laplace Transformation liefert dann mit der uns bereits bekannten sin- und cos-Transformationen:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)](t) = 4cos(3t) + \frac{1}{3}sin(3t)$$

b) $F(s) = \frac{2+(s-1)(3-2s)}{(s-3)(s+2)(s-2)}$

Aufteilen der Funktion:

$$F(s) = \frac{2+(s-1)(3-2s)}{(s-3)(s+2)(s-2)} = \frac{2}{(s-3)(s+2)(s-2)} + \frac{(s-1)(3-2s)}{(s-3)(s+2)(s-2)}$$

Partialbruchzerlegung für jeden der beiden Terme liefert:

$$\frac{2}{(s-3)(s+2)(s-2)} = -\frac{1}{2}\frac{1}{s-2} + \frac{1}{10}\frac{1}{s+2} + \frac{2}{5}\frac{1}{s-3}$$

$$\frac{(s-1)(3-2s)}{(s-3)(s+2)(s-2)} = -\frac{7}{5}\frac{1}{s+2} - \frac{3}{5}\frac{1}{s-3}$$

Nun ist die inverse Laplacetransformation mittels Dämpfungssatz (mit f(t)=1) einfach:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)](t) = -\frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{10}e^{-2t} + \frac{2}{5}e^{3t} - \frac{7}{5}e^{-2t} - \frac{3}{5}e^{3t} =$$

$$= -\frac{1}{2}e^{2t} - \frac{13}{10}e^{-2t} - \frac{1}{5}e^{3t}$$

c) $F(s) = \frac{1-4s}{(s^2+1)(s^2+16)}$

Aufteilen der Funktion:

$$F(s) = \frac{1-4s}{(s^2+1)(s^2+16)} = \frac{1}{(s^2+1)(s^2+16)} - \frac{4s}{(s^2+1)(s^2+16)}$$

Partialbruchzerlegung für jeden der beiden Terme liefert:

$$\frac{1}{(s^2+1)(s^2+16)} = \frac{1}{15}\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{15}\frac{1}{s^2+16}$$

$$-\frac{4s}{(s^2+1)(s^2+16)} = -\frac{4}{15}\frac{x}{x^2+1} + \frac{4}{15}\frac{x}{x^2+16}$$

Die inverse Laplacetransformation ist nun einfach:

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{15}\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{4\cdot 15}\frac{4}{s^2+16} - \frac{4}{15}\frac{x}{x^2+1} + \frac{4}{15}\frac{x}{x^2+16}](t) =$$

$$= \frac{1}{15}sin(t) - \frac{1}{60}sin(4t) - \frac{4}{15}cos(t) + \frac{4}{15}cos(4t)$$

d) $F(s) = e^{-s}(\frac{3}{s} - \frac{1}{s^2}) + e^{-3s}(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2})$

Wie in Aufgabe 84 benötigen wir wieder die Heaviside-Funktion. Umschreiben der Funktion liefert:

$$F(s) = e^{-s}\frac{3}{s} - e^{-s}\frac{1}{s^2}) + e^{-3s}\frac{1}{s} + e^{-3s}\frac{1}{s^2})$$

Die inverse Laplacetransformierte ohne den Exponentialfunktionen wäre einfach:

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{3}{s} - \frac{1}{s^2}) + \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2})](t) = 3 - t + 1 + t$$

Mit den Exponentialfunktionen allerdings müssen wir nun die Heaviside-Funktion berücksichtigen und t um b verschieben:

$$\mathcal{L}^{-1}[e^{-s}\frac{3}{s} - e^{-s}\frac{1}{s^2}) + e^{-3s}\frac{1}{s} + e^{-3s}\frac{1}{s^2})](t) =$$

$$= 3H(t-1) - H(t-1)(t-1) + H(t-3) + H(t-3)(t-3)$$

## Aufgabe 86

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme unter Verwendung der LAPLACE-Transformation:

a) $y' - 2y = te^{4t}$, $y(0) = 0$

Um Differentialgleichungen mit Laplacetransformation zu lösen benötigen wir die Relationen aus der Vorlesung, zu finden in den Folien 'Laplace Transformation':

$$\mathcal{L}[f'(t)](s) = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0)$$
$$\mathcal{L}[f''(t)](s) = s\mathcal{L}[f'(t)] - f'(0) = s^2\mathcal{L}[f(t)] - sf(0) - f'(0)$$
$$usw.$$

Das heißt als erstes Laplacetransformieren wir die DGL:

$$\begin{aligned} y' - 2y = te^{4t} \quad /\mathcal{L}[...] \\ \mathcal{L}[y'] - \mathcal{L}[2y] = \mathcal{L}[te^{4t}] \end{aligned}$$

Mit $\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$ und den Relationen für die Laplacetransformation erhalten wir:

$$sY(s) - y(0) - 2Y(s) = \frac{1}{(s-4)^2}$$

Diese Gleichung können wir nun nach Y(s) auflösen:

$$Y(s) = \frac{1}{(s-2)(s-4)^2}$$

Um nun die Lösung der DGL zu finden, verwenden wir die Rücktransformation $\mathcal{L}^{-1}[Y(s)](t) = y(t)$. Dazu müssen wir Y(s) mittels PBZ zerlegen:

$$Y(s) = \frac{1}{(s-2)(s-4)^2} = -\frac{1}{4}\frac{1}{s-4} + \frac{1}{2}\frac{1}{(s-4)^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{s-2}$$

Das können wir nun leicht transformieren:

$$\mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = -\frac{1}{4}e^{4t} + \frac{1}{2}te^{4t} + \frac{1}{4}e^{2t}$$

Das ist auch die spezielle Lösung y(t) der ursprünglichen Differentialgleichung.

b) $y'' - 4y' - 5y = 0$, $y(0) = 5$, $y'(0) = 1$

Gleiche Vorgehensweise wie in Beispiel 87a. DGL Laplacetransformieren und die Relationen für die höhreren Ableitungen einsetzen:

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 4sY(s) + 4y(0) - 5Y(s) = 0$$

y(0) und y'(0) einsetzen und ach Y(s) umformen:

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 - 4s - 5}$$

Nenner zerlegen (Nullstelle raten und Polynomdivison) führt auf:

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s-5)}$$

Partialbruchzerlegung:

$$Y(s) = -\frac{1}{6}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{6}\frac{1}{s-5}$$

Das können wir nun leicht wieder zurücktransformieren:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = -\frac{1}{6}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{5t}$$

c) $y'' - 3y' - 4y = 3$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

Wir transformieren die DGL wieder in den Spektralbereich und verwenden die Laplace-Transformationen für die Ableitungen von y(x):

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 3sY(s) + 3y(0) - 4Y(s) = \mathcal{L}[3](s) = \frac{3}{s}$$

Umformen auf Y(s) bringt:

$$Y(s) = \frac{1}{(s^2 - 3s - 4)s}$$

Nenner zerlegen (Nullstelle raten und Polynomdivison) führt auf:

$$Y(s) = \frac{3}{(s+1)(s-4)s}$$

Partialbruchzerlegung:

$$Y(s) = \frac{3}{5}\frac{1}{s+1} + \frac{3}{20}\frac{1}{s-4} - \frac{3}{4}\frac{1}{s}$$

Die Lösung der DGL ist nun wieder die inverse Laplace Transformierte:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \frac{3}{5}e^{-t} + \frac{3}{20}e^{4t} - \frac{3}{4}$$

d) $y''' + 8y = 6e^{7t}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -6$, $y''(0) = 12$

Laplacetransformation liefert:

$$s^3Y(s) - s^2y(0) - sy'(0) - y''(0) + 8Y(s) = \mathcal{L}[6e^{7t}] = 6\frac{1}{s-7}$$

Anfangsbedingungen eingesetzt:

$$s^3Y(s) - 3s^2 + 6s - 12 + 8Y(s) = 6\frac{1}{s-7}$$

Umformen auf Y(s):

$$Y(s) = \frac{6}{(s-7)(s^3+8)} + \frac{3s^2}{s^3+8} - \frac{6s}{s^3+8} + \frac{12}{s^3+8}$$

Der Term $s^3+8$ lässt sich zerlegen in $(s+2)(s^2-4s+2)$. Partialbruchzerlegung liefert dann für die jeweiligen Terme:

$$\frac{6}{(s-7)(s+2)(s^2-4s+2)} = -\frac{1}{108}\frac{1}{s+2} + \frac{1}{351}\frac{1}{s-7} + \frac{1}{156}\frac{s}{s^2-2s+4} - \frac{2}{39}\frac{1}{s^2-2s+4}$$

$$\frac{3s^2}{(s+2)(s^2-4s+2)} = \frac{1}{s+2} + \frac{2s}{s^2-2s+4} - \frac{2}{s^2-2s+4}$$

$$\frac{-6s}{(s+2)(s^2-4s+2)} = \frac{1}{s+2} - \frac{s}{s^2-2s+4} - \frac{2}{s^2-2s+4}$$

$$\frac{12}{(s+2)(s^2-4s+2)} = \frac{1}{s+2} - \frac{s}{s^2-2s+4} + \frac{4}{s^2-2s+4}$$

Wir summieren die ganzen Terme und vereinfachen:

$$Y(s) = \frac{2}{117}\frac{1}{s-7} + \frac{53}{18}\frac{1}{s+2} + \frac{1}{26}\frac{s-1+1}{(s-1)^2+3} - \frac{8}{26}\frac{1}{(s+1)^2+3}$$

Nochmal umschreiben auf eine bekannte Form der inversen Laplacetransformation:

$$Y(s) = \frac{2}{117}\frac{1}{s-7} + \frac{53}{18}\frac{1}{s+2} + \frac{1}{26}\frac{s-1}{(s-1)^2+3} - \frac{7}{26\cdot\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{(s-1)^2+3}$$

Die inverse Laplacetransformation von Y(s) liefert uns die Lösung der DGL:

$$y(t) = \frac{2}{117}e^{7t} + \frac{53}{18}e^{-2t} + \frac{1}{26}e^t cos(\sqrt{3}t) - \frac{7}{26}e^t sin(\sqrt{3}t)$$

## Aufgabe 87

Stellen Sie folgende Funktion unter Verwendung der HEAVISIDE-Funktion dar (Skizze!) und bestimmen Sie $\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}$

$$f(t) = \begin{cases} t & f\ddot{u}r\ 0 \leq \text{t} \leq 2 \\ \text{4 - t} & f\ddot{u}r\ 2 < \ t \leq 4 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Heaviside-Stufenfunktion $\theta(x)$ ist 1 wenn das Argument $x > 0$ ist und 0 wenn $x < 0$ ist:

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & f\ddot{u}r\ x\ >\ 0 \\ 0 & f\ddot{u}r\ x\ <\ 0 \end{cases}$$

$\theta(x-2)$ ist dann zum Beispiel 1 für $x > 2$. Damit lässt sich die Funktion zusammenstellen.

$$f(t) = t\ f\ddot{u}r\ 0\ \leq\ t\ \leq\ 2$$

Lässt sich dann zum Beispiel ausdrücken durch:

$$f(t) = t \cdot \theta(t) - t \cdot \theta(t-2)$$

Wobei der erste Term eine Funktion f(t) = t ist von t = 0 bis t = $\infty$, und der zweite Term ist die selbe Funktion f(t)=t aber startet erst mit t = 2. Diese Terme subtrahiert ergeben dann genau die Funktion f(t) = t, von t=0 bis t=2 und f(t)= 0 sonst. Dargestellt in Abbildung 1

Dasselbe überlegen wir uns für die Funktion:

$$f(t) = (4-t)\ \ f\ddot{u}r\ 2\ \leq\ t\ \leq\ 4$$

Diese können wir schreiben als:

$$f(t) = (4-t) \cdot \theta(t-2) - (4-t) \cdot \theta(t-4)$$

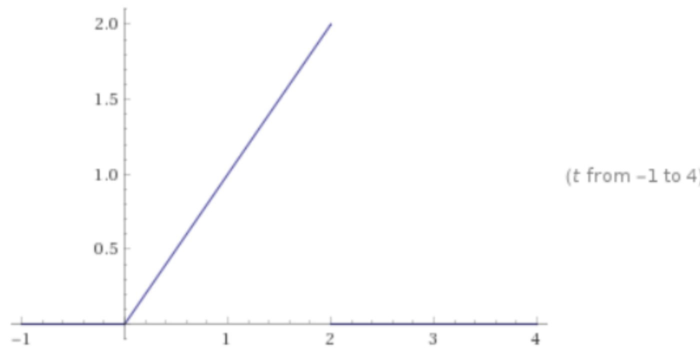


Abbildung 1: $f(t) = t \cdot \theta(t) - t \cdot \theta(t-2)$

Somit können wir die gesamte Funktion als Summe dieser beiden Funktionen schreiben:

$$\begin{aligned} f(t) = t \cdot \theta(t) - t \cdot \theta(t-2) + (4-t) \cdot \theta(t-2) - (4-t) \cdot \theta(t-4) = \\ = t \cdot \theta(t) + (4-2t) \cdot \theta(t-2) - (4-t) \cdot \theta(t-4) \end{aligned}$$

Die Funktion ist dargestellt in Abbildung 2

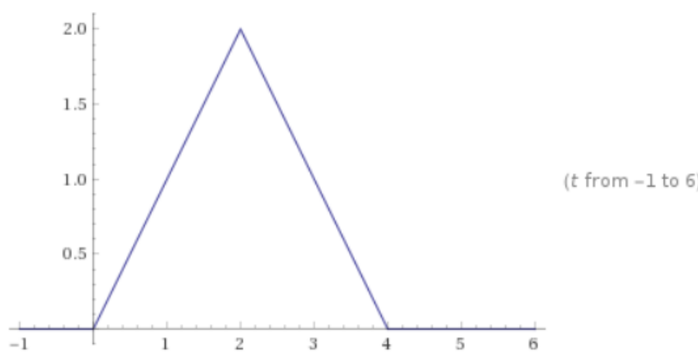


Abbildung 2: $t \cdot \theta(t) + (4-2t) \cdot \theta(t-2) - (4-t) \cdot \theta(t-4)$

Um die Laplace Transformierte dieser Funktion zu bestimmen, schreiben wir sie zuerst um:

$$\begin{aligned} f(t) = t \cdot \theta(t) + (4-2t) \cdot \theta(t-2) - (4-t) \cdot \theta(t-4) = \\ = t \cdot \theta(t) - 2(t-2) \cdot \theta(t-2) + (t-4) \cdot \theta(t-4) \end{aligned}$$

Dann können wir mit der Relation für die Heavisidefunktion ganz einfach die Transformation durchführen:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t)](s) = \mathcal{L}[t\cdot\theta(t) - 2(t-2)\cdot\theta(t-2) + (t-4)\cdot\theta(t-4)](s) = \\ = \frac{1}{s^2}e^0 - 2\frac{1}{s^2}e^{-2s} + \frac{1}{s^2}e^{-4s} = \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s^2}e^{-2s} + \frac{1}{s^2}e^{-4s}\end{aligned}$$

## Aufgabe 88

Man bestimme die LAPLACE-Transformierte der Funktion

$$f(t) = \begin{cases} t & \textit{für } 0 \leq \mathrm{t} < 1 \\ 1 & \textit{für } \mathrm{t} \geq 1 \end{cases}$$

Als erstes drücken wir die Funktion wieder mit der Heavyside-Funktion aus:

$$f(t) = tH(t) - tH(t-1) + H(t-1)$$

Für die Laplacetransformation ist es nun am einfachsten, wenn wir die Funktion auf folgende Form umschreiben:

$$f(t) = tH(t) - tH(t-1) + H(t-1) = tH(t) - H(t-1)(t-1)$$

Nun können wir mit der Relation der Heaviside Transformation ganz einfach die Transformierte bestimmen:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t)](s) = \mathcal{L}[tH(t) - H(t-1)(t-1)](s) = \\ = \frac{1}{s^2}e^0 - \frac{1}{s^2}e^{-s} = \frac{1-e^{-s}}{s^2}\end{aligned}$$

## Aufgabe 89

Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems unter Verwendung der LAPLACE-Transformation

a) $y' - 2y = 2t^2(H(t) - H(t-2))$, $y(0) = 1$

Wir gehen vor wie immer und tranformieren die Gleichung als erstes in den Spektralraum unter Zuhilfenahme folgender Kenntnis:

$$\mathcal{L}[H(t-b)f(t-b)](s) = e^{-bs}F(s) \quad \textit{für } s \geq 0$$

Wir schreiben die Gleichung davor noch um:

$y' - 2y = 2t^2H(t) - 2(t-2)^2H(t-2) - 8(t-2)H(t-2) - 8H(t-2)$

Die Transformierte ist nun:

$$sY(s) - y(0) - 2Y(s) = \frac{4}{s^3} - \frac{4e^{-2s}}{s^3} - \frac{8e^{-2s}}{s^2} - \frac{8e^{-2s}}{s}$$

Umformen auf Y(s):

$$Y(s) = \frac{4}{s^3(s-2)} - \frac{4e^{-2s}}{s^3(s-2)} - \frac{8e^{-2s}}{s^2(s-2)} - \frac{8e^{-2s}}{s(s-2)} + \frac{1}{(s-2)}$$

Partialbruchzerlegung liefert:

$$Y(s) = \frac{4}{s^3(s-2)} - \frac{4e^{-2s}}{s^3(s-2)} - \frac{8e^{-2s}}{s^2(s-2)} - \frac{8e^{-2s}}{s(s-2)} + \frac{1}{(s-2)}$$

Wir müssen nun für jeden Term eine PBZ machen und dann wieder zurücktransformieren. Die Lösung der DGL lautet dann:

$y(t) = \frac{13}{2}e^{2t-4}H(2-t) + \frac{3}{2}e^{2t} - \frac{13}{2}e^{2t-4} - t^2H(2-t) - 2tH(2-t) - H(2-t)$

b) $y'' - 4y = H(t) - 2H(t-3) + H(t-4)$, $y(0) = y'(0) = 0$

Die Laplace Transformierte Gleichung lautet:

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 4Y(s) = \frac{1}{s} - 2\frac{e^{-3s}}{s} + \frac{e^{-4s}}{s}$$

Umgeformt nach Y(s):

$$Y(s) = \frac{1}{s(s^2-4)} - 2\frac{e^{-3s}}{s(s^2-4)} + \frac{e^{-4s}}{s(s^2-4)}$$

Partialbruchzerlegung:

$$Y(s) = -\frac{1}{4}\frac{1}{s} + \frac{1}{8}\frac{1}{s-2} + \frac{1}{8}\frac{1}{s+2} - 2e^{-3s}\left(-\frac{1}{4}\frac{1}{s} + \frac{1}{8}\frac{1}{s-2} + \frac{1}{8}\frac{1}{s+2}\right) + \\ + e^{-4s}\left(-\frac{1}{4}\frac{1}{s} + \frac{1}{8}\frac{1}{s-2} + \frac{1}{8}\frac{1}{s+2}\right)$$

Die inverse Transformation ist nun einfach:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \frac{e^{-2t}}{8} + \frac{e^{2t}}{8} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{2(t-3)}H(t-3) - \frac{1}{4}e^{2(3-t)}H(t-3) +$$
$$+\frac{1}{2}H(t-3) + \frac{1}{8}e^{2(t-4)}H(t-4) + \frac{1}{8}e^{2(4-t)}H(t-4) - \frac{1}{4}H(t-4)$$

## Aufgabe 90

Lösen Sie mittels der LAPLACE- Transformation und unter Verwendung des Faltungssatzes das Anfangswertproblem:

$$y^{IV} + 4y'' = 0,\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0,\ y'''(0) = 4$$

Zuerst berechnen wir die Laplacetransformierte der Gleichung:

$$s^4Y(s) - s^3y(0) - s^2y'(0) - sy''(0) - y'''(0) + 4s^2Y(s) - 4sy(0) - 4y'(0) = 0$$

Vereinfachen:

$$s^4Y(s) - 4 + 4s^2Y(s) = 0$$

Umformen auf Y(s):

$$Y(s) = \frac{4}{s^4 + 4s^2} = \frac{4}{s^2}\frac{4}{s^2+4}$$

Der Faltungssatz (f gefalten mit g, bzw. f*g) lautet folgendermaßen:

$$(f * g)(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] * \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = \mathcal{L}^{-1}[F(s) \cdot G(s)]$$

Wir wollen also folgendes berechnen:

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{4}{s^2} \cdot \frac{4}{s^2+4}] = \mathcal{L}^{-1}[\frac{4}{s^2}] * \mathcal{L}^{-1}[\frac{4}{s^2+4}] = (f * g)(t)$$

Die einzelnen Terme invers transformiert ergeben folgendes:

$$(f * g)(t) = 4t * 2sin(2t)$$

Die Faltung ist auch definiert als folgendes Integral:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

Die Lösung y(t) folgt somit aus der Berechnung des Integrals:

$$y(t) = (f * g)(t) = 4t * 2sin(2t) = \int_0^t (4\tau) \cdot (2sin(2(t-\tau))d\tau$$

Das Integral partiell gelöst ergibt dann:

$$y(t) = [4scos(2s - 2t) - 2sin(2s - 2t)]|_0^t = 4t - 2sin(2t)$$

## Aufgabe 91

Unter Verwendung der LAPLACE-Transformation löse man folgende Anfangswertprobleme:

a) $y'' + 3y' + 2y = e^t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -6$

Wir transformieren die Gleichung:

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 3sY(s) - 3y(0) + 2Y(s) = \frac{1}{s-1}$$

Umformen auf Y(s):

$$Y(s) = \frac{1}{s-1}\frac{1}{s^2+3s+2} + s\frac{1}{s^2+3s+2} - 3\frac{1}{s^2+3s+2}$$

PBZ führt auf:

$$Y(s) = \frac{1}{6}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{3}\frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+1} + 2\frac{1}{s+2} - 3\frac{1}{s+1} + 3\frac{1}{s+2}$$

Vereinfachen:

$$Y(s) = \frac{1}{6}\frac{1}{s-1} - \frac{9}{2}\frac{1}{s+1} + \frac{16}{3}\frac{1}{s+2}$$

Die Lösung der DGL ist nun einfach die Rücktransformierte y(t):

$$y(t) = \frac{1}{6}e^t - \frac{9}{2}e^{-t} + \frac{16}{3}e^{-2t}$$

b) $y'' + 4y = 3sin(t)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$

Wir transformieren die Gleichung:

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4Y(s) = 3\frac{1}{s^2+1}$$

Umformen auf Y(s):

$$Y(s) = 3\frac{1}{s^2+1}\frac{1}{s^2+4} + s\frac{1}{s^2+4} - \frac{1}{s^2+4}$$

PBZ:

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+4} + s\frac{1}{s^2+4} - \frac{1}{s^2+4}$$

Vereinfachen:

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+1} - \frac{2}{s^2+4} + \frac{2}{s^2+4}$$

Die Rücktransformierte y(t) lautet dann:

$$y(t) = sin(t) - sin(2t) + cos(2t)$$

c) y"+y = $\begin{cases} 3 & 0 \leq t < \pi \\ 0 & t \geq \pi \end{cases}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

Zuerst drücken wir die Störfunktion mit der Heaviside Funktion aus:

$$s(t) = 3(H(t) - H(t-\pi))$$

Dann transformieren wir die DGL:

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + Y(s) = \frac{3}{s} + \frac{3e^{-\pi s}}{s}$$

Umformen auf Y(s):

$$Y(s) = \frac{3}{s}\frac{1}{s^2+1} + \frac{3e^{-\pi s}}{s}\frac{1}{s^2+1}$$

PBZ ergibt:

$$Y(s) = \frac{3}{s} - \frac{3s}{s^2+1} + \frac{3e^{-\pi s}}{s} - \frac{3se^{-\pi s}}{s^2+1}$$

Die Lösung der DGL lautet dann also:

$$y(t) = 3 - 3cos(t) - 3H(t-pi) - 3cos(t)H(t-pi)$$

d) $y'' + 3y' + 2y = 6e^{2t} + 2\delta(t-1)$ mit $y(0) = 2$, $y'(0) = -6$

$\delta$ ist die Diracsche Deltafunktion die folgende Eigenschaften besitzt:

$$\delta(t-a) = 0 \ f\ddot{u}r \ t \neq a \quad und \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)dt = 1$$

Die Laplace Transformierte der $\delta$-Funktion ist gegeben durch:

$$\mathcal{L}[\delta(t-a)] = e^{-as}$$

Wir transformieren also die DGL:

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 3sY(s) - 3y(0) + 2Y(s) = \frac{6}{s-2} + 2e^{-as}$$

Umformen auf Y(s):

$$Y(s) = \frac{6}{s-2}\frac{1}{s^2+3s+2} + 2e^{-s}\frac{1}{s^2+3s+2} + 2s\frac{1}{s^2+3s+2}$$

PBZ führt auf:

$$Y(s) = \frac{2e^{-s}}{s+1} - \frac{4}{s+1} - \frac{2e^{-s}}{s+2} + \frac{11}{2(s+2)} + \frac{1}{2(s-2)}$$

Rücktransformation:

$$y(t) = -2e^{2(1-t)}H(t-1) + 2e^{1-t}H(t-1) + \frac{11e^{-2t}}{2} - 4e^{-t} + \frac{e^{2t}}{2}$$

## Aufgabe 92

Man bestimme die FOURIER-Reihen der folgenden periodischen Funktionen, wobei T die Länge der Periode angibt.
Fertigen Sie eine Skizze der Funktion an und beachten Sie eventuelle Symmetrien

Allgemein gilt für eine Funktion $f(x)$ mit der Periode $T = 2L$ folgende Darstellung ihrer FOURIER-Reihe:

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k cos\frac{kx\pi}{L} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k sin\frac{kx\pi}{L} \text{ mit}$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\; dx$$

$$a_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) cos\frac{k\pi}{L}x\; dx$$

$$b_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) sin\frac{k\pi}{L}x\; dx$$

Für gerade Funktionen $f(x) = f(-x)$ gilt $b_k = 0$ für alle $b_k$
Für ungerade Funktionen $-f(x) = f(-x)$ gilt $a_k = 0$ für alle $a_k$

a) $f(x) = \begin{cases} 1 & f\ddot{u}r\ 0 \ \leq \text{x} \ \leq \pi/2 \\ -2 & f\ddot{u}r\ \pi/2 \ < \ x \ \leq \ \pi \end{cases}, \; f(-x) = -f(x),\; T = 2\pi$

Die Funktion ist ungerade: $f(-x) = -f(x)$, deshalb gilt $a_k = 0$ und somit

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k sin\frac{kx\pi}{L}$$

Für den Spezialfall $T = 2\pi$ gilt

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) sinkx\; dx$$

und

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k sinkx$$

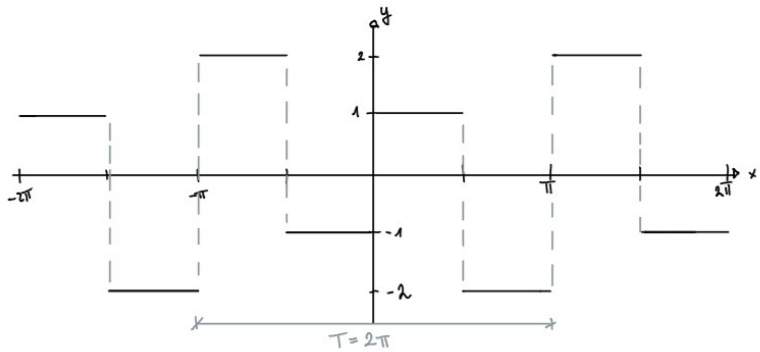


Abbildung 3: $f(x) = \begin{cases} 1 & f\ddot{u}r\ 0\ \leq \text{x}\ \leq \pi/2 \\ -2 & f\ddot{u}r\ \pi/2\ <\ x\ \leq\ \pi \end{cases},\ f(-x) = -f(x),\ T = 2\pi$

Durch Einsetzen der Funktion $f(x)$ erhalten wir

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) sinkx\ dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) sinkx\ dx$$

$$b_k = \frac{2}{\pi}[\int_0^{\pi/2} sinkx\ dx - 2\int_{\pi/2}^{\pi} sinkx\ dx]$$

$$b_k = \frac{2}{\pi}[-\frac{cos\frac{\pi k}{2}}{k} + \frac{cos(0)}{k} - 2(\frac{cos\frac{\pi k}{2}}{k} - \frac{cos(\pi k)}{k})]$$

$$b_k = \frac{2}{\pi k}[1 - 3cos\frac{\pi k}{2} + 2cos\pi k]$$

Es gilt $cos\pi k = (-1)^k\ f\ddot{u}r\ k \in \mathbb{N}$, also

$$b_k = \frac{2}{\pi k}[1 - 3cos\frac{\pi k}{2} + 2(-1)^k]$$

Für die FOURIER-Reihe der Funktion $f(x)$ gilt also

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k}[1 - 3cos\frac{\pi k}{2} + 2(-1)^k]\ sin(kx)$$

b) $f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & f\ddot{u}r \ -2 \leq \ x \leq 0 \\ x & f\ddot{u}r \ 0 \ < \ x \ \leq \ 2 \end{cases}$, T = 4

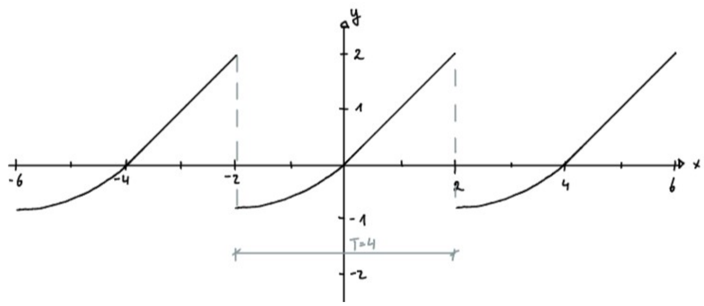


Abbildung 4: $f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & f\ddot{u}r \ -2 \leq \ x \leq 0 \\ x & f\ddot{u}r \ 0 \ < \ x \ \leq \ 2 \end{cases}$, T = 4

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k cos \frac{kx\pi}{L} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k sin \frac{kx\pi}{L}$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\ dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\ dx$$
$$a_0 = \frac{1}{2}[\int_{-2}^{0}(e^x - 1)\ dx + \int_{0}^{2} x\ dx]$$
$$a_0 = \frac{1}{2}[\ [e^x - x]_{-2}^{0} + [\frac{x^2}{2}]_0^2\ ]$$
$$a_0 = \frac{1}{2}\ (1 - e^{-2})$$

$$a_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) cos \frac{k\pi}{L} x\ dx$$
$$a_k = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x) cos \frac{k\pi}{2} x\ dx$$
$$a_k = \frac{1}{2}(\int_{-2}^{0}(e^x - 1) cos \frac{k\pi}{2} x\ dx + \int_{0}^{2} x cos \frac{k\pi}{2} x\ dx)$$

$$\int_{-2}^{0}(e^x - 1) cos \frac{k\pi}{2} x\ dx = \int_{-2}^{0} e^x cos \frac{k\pi}{2} x\ dx - \int_{-2}^{0} cos \frac{k\pi}{2} x dx$$

Das Integral $\int_{-2}^{0} e^x cos \frac{k\pi}{2} x$ lösen wir, indem wir zweimal partiell integrieren:

$$\int f'g = fg - \int fg'$$
$$f_1' = e^x, \quad g_1 = cos\frac{\pi kx}{2}$$
$$\int_{-2}^{0} e^x cos\frac{k\pi}{2}x\ dx = e^x cos\frac{k\pi}{2}x - \int_{-2}^{0} e^x(-\frac{\pi k sin\frac{\pi kx}{2}}{2})\ dx$$
$$f_2' = e^x, \quad g_2 = -\frac{\pi k sin\frac{\pi kx}{2}}{2}$$
$$\int_{-2}^{0} e^x cos\frac{k\pi}{2}x\ dx = e^x cos\frac{k\pi}{2}x - (-e^x\frac{\pi k sin\frac{\pi kx}{2}}{2} + \frac{\pi^2 k^2}{4}\int_{-2}^{0} e^x cos(\frac{\pi kx}{2})\ dx)$$

Da das Integral $\int_{-2}^{0} e^x cos\frac{k\pi}{2}x\ dx$ auf beiden Seiten der Gleichung vorkommt:

$$\int_{-2}^{0} e^x cos\frac{k\pi}{2}x\ dx = [\frac{2e^x(\pi k sin(\frac{\pi kx}{2}) + 2cos\frac{\pi kx}{2})}{\pi^2 k^2 + 4}]_{-2}^{0}$$
$$\int_{-2}^{0} e^x cos\frac{k\pi}{2}x\ dx = \frac{2e^{-2}(\pi k sin(\pi k) - 2cos(\pi k) + 2e^2)}{\pi^2 k^2 + 4} = \frac{2e^{-2}(-2(-1)^k + 2e^2)}{\pi^2 k^2 + 4}$$

Für das Integral $\int_{-2}^{0} cos\frac{k\pi}{2}xdx$ gilt:

$$\int_{-2}^{0} cos\frac{k\pi}{2}xdx = \frac{2\sin(\pi k)}{\pi k} = 0$$

Also

$$\int_{-2}^{0}(e^x - 1)cos\frac{k\pi}{2}x\ dx = \frac{2e^{-2}(-2(-1)^k + 2e^2)}{\pi^2 k^2 + 4}$$

Auch das Integral $\int_{0}^{2} xcos\frac{k\pi}{2}x\ dx)$ lösen wir partiell:

$$\int_{0}^{2} xcos\frac{k\pi}{2}x\ dx) = [\frac{2\left(\pi kx\sin\left(\frac{\pi kx}{2}\right) + 2\cos\left(\frac{\pi kx}{2}\right)\right)}{\pi^2 k^2}]_{0}^{2}$$
$$= \frac{4(\pi k\sin(\pi k) + \cos(\pi k) - 1)}{\pi^2 k^2} = \frac{4((-1)^k - 1)}{\pi^2 k^2}$$

So ergibt sich $a_k$:

$$a_k = \frac{1}{2}[\frac{2e^{-2}(-2(-1)^k + 2e^2)}{\pi^2 k^2 + 4} + \frac{4((-1)^k - 1)}{\pi^2 k^2}]$$

$$b_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)sin\frac{k\pi}{L}x\ dx$$
$$b_k = \frac{1}{2}(\int_{-2}^{0}(e^x - 1)sin\frac{k\pi}{2}x\ dx + \int_{0}^{2} xsin\frac{k\pi}{2}x\ dx)$$

Wir berechnen $b_k$ wie $a_k$ mit partieller Integration und erhalten so:

$$b_k = \frac{-e^2\pi k + 2sin(\pi k) + \pi k cos(\pi k)}{e^2(\pi^2 k^2+4)} + \frac{1-cos(\pi k)}{\pi k} + \frac{2sin(\pi k) - 2\pi k cos(\pi k)}{\pi^2 k^2}$$
$$b_k = \frac{-e^2\pi k + \pi k(-1)^k}{e^2(\pi^2 k^2+4)} + \frac{1-(-1)^k}{\pi k} - \frac{2(-1)^k}{\pi k}$$

Die FOURIER-Reihe für $f(x)$ lautet also:

$$S(x) = \frac{(1-e^{-2})}{4} + \sum_{k=1}^{\infty}[\frac{1}{2}[\frac{2e^{-2}(-2(-1)^k+2e^2)}{\pi^2 k^2+4} + \frac{4((-1)^k-1)}{\pi^2 k^2}]]cos\frac{kx\pi}{2}$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}[\frac{-e^2\pi k+\pi k(-1)^k}{e^2(\pi^2 k^2+4)} + \frac{1-(-1)^k}{\pi k} - \frac{2(-1)^k}{\pi k}]sin\frac{kx\pi}{2}$$

c) $f(x) = \begin{cases} 0 & f\ddot{u}r\ 0\ \leq\ x\ \leq 0.5 \\ \text{2x-x}^2 & f\ddot{u}r\ 0.5\ <\ x\ \leq\ 1 \end{cases},\ f(-x) = f(x),\ T = 2$

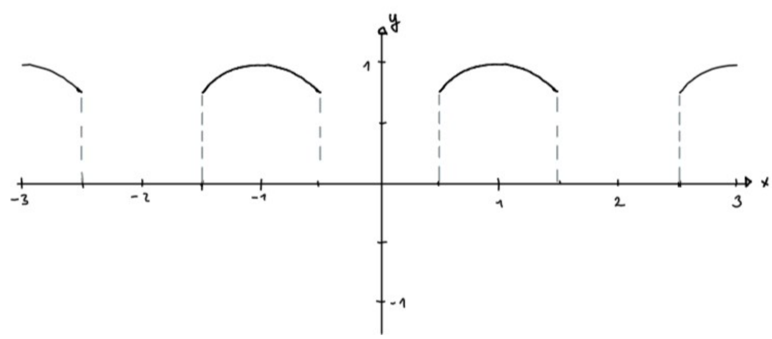


Abbildung 5: $f(x) = \begin{cases} 0 & f\ddot{u}r\ 0\ \leq\ x\ \leq 0.5 \\ \text{2x-x}^2 & f\ddot{u}r\ 0.5\ <\ x\ \leq\ 1 \end{cases},\ f(-x) = f(x),\ T = 2$

Da die Funktion gerade ist gilt $b_k = 0$

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k cos\frac{kx\pi}{1}$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\ dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\ dx$$
$$a_0 = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} f(x)\ dx = 2[\int_0^{0.5} 0\ dx + \int_{0.5}^{1}(2x-x^2)\ dx]$$
$$a_0 = \frac{11}{12}$$

$$a_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) cos\frac{k\pi}{L}x\ dx$$
$$a_k = 2[\int^{0.5} 0\ cos(k\pi x)\ dx +\ \int_{0.5}^{1}(2x - x^2)\ cos(k\pi x)\ dx]$$
$$a_k = -2\int_{0.5}^{1}(x^2 - 2x)\ cos(k\pi x)\ dx$$

Dieses Integral lösen wir, indem wir zweimal partiell integrieren:

$$f_1' = cos(\pi kx) \quad g_1 = x^2 - 2x$$
$$\int(x^2 - 2x)\ cos(k\pi x)\ dx = \frac{\left(x^2-2x\right)\sin(\pi kx)}{\pi k} - 2\int \frac{(x-1)\sin(\pi kx)}{\pi k}\,\mathrm{d}x$$
$$f_2' = sin(\pi kx) \quad g_2 = x - 1$$
$$\int (x-1)\sin(\pi kx)\,\mathrm{d}x = -\frac{(x-1)\cos(\pi kx)}{\pi k} - \int -\frac{\cos(\pi kx)}{\pi k}\,\mathrm{d}x$$

Wir substituieren

$$u = \pi kx, \quad \frac{du}{dx} = \pi k, \quad dx = \frac{1}{\pi k}$$

und erhalten so

$$\int (x-1)\sin(\pi kx)\,\mathrm{d}x = -\frac{(x-1)\cos(\pi kx)}{\pi k} - (-\frac{\sin(\pi kx)}{\pi^2 k^2})$$

Eingesetzt in das ursprüngliche Integral erhalten wir

$$\int_{0.5}^{1}(x^2 - 2x)\ cos(k\pi x)\ dx = [\frac{\left(x^2-2x\right)\sin(\pi kx)}{\pi k} + 2\frac{(x-1)\cos(\pi kx)}{\pi^2k^2} - 2\frac{\sin(\pi kx)}{\pi^3k^3}]_{0.5}^{1}$$
$$= \frac{\left(\pi^2k^2+2\right)\sin(\pi k)}{\pi^3k^3} - \frac{\left(3\pi^2k^2+8\right)\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)+4\pi k\cos\left(\frac{\pi k}{2}\right)}{4\pi^3k^3}$$
$$= -\frac{\left(3\pi^2k^2+8\right)\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)+4\pi k\cos\left(\frac{\pi k}{2}\right)}{4\pi^3k^3}$$

Daraus folgt $a_k$

$$a_k = \frac{\left(3\pi^2k^2+8\right)\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)+4\pi k\cos\left(\frac{\pi k}{2}\right)}{2\pi^3k^3}$$

Und somit die FOURIER-Reihe

$$S(x) = \frac{11}{24} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(3\pi^2k^2+8\right)\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)+4\pi k\cos\left(\frac{\pi k}{2}\right)}{2\pi^3k^3} cos(kx\pi)$$

## Aufgabe 93

Man bestimme die Lösung der folgenden Saitenschwingungsprobleme

a) $u_{xx} = u_{tt}$, $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, $u(x,0) = \sin 3x$, $u_t(x,0) = 0$

Randbedingung RB: $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$

Anfangsbedingung AB: $u(x,0) = \sin 3x$, $u_t(x,0) = 0$

Allgemeine Wellengleichung: $u_{tt} = c^2 u_{xx}$
$u_{xx} = u_{tt}$ $\rightarrow$ c = 3

RB führen zur Lösung

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} sin(nx)(A_n cos(cnt) + B_n sin(cnt)$$

Aus AB:

$$u_t(x,0) = 0 = sin(nx)(-A_n sin(0) + B_n cos(0))cn$$
$$u(x,0) = sin(nx)(-B_n)cn = 0$$
$$B_n = 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

$$u(x,0) = sin(3x) = sin(nx)\ A_n\ cos(0)$$
$$\rightarrow Lösungfür\text{n=3}$$
$$A_3 = 1$$
$$A_n = 0 \text{ für } n \neq 3$$

Daraus folgt die Lösung:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} sin(nx)(A_n cos(cnt)$$
$$u(x,t) = sin(3x)cos(3t)$$

b) $9u_{xx} = u_{tt}$, $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 3\ \text{sin}x\ \text{cos}x$

$9u_{xx} = u_{tt}\ \ \rightarrow$ c = 3

Randbedingung RB:
$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$

Anfangsbedingung AB:
$u(x,0) = 0,$
$u_t(x,0) = 3\ \text{sin}x\ \text{cos}x$

RB führen zur Lösung

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} sin(nx)(A_n cos(cnt) + B_n sin(cnt)$$

Aus AB:

$$u(x,0) = 0 = sin(nx)\ A_n\ cos(0)0$$
$$A_n = 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$
$$u_t(x,0) = 3\ \text{sin}x\ \text{cos}x = sin(nx)\ c\ B_n\ cos(0)$$
$$B_n \text{ ist keine Funktion von x}$$

Nun gibt es 2 Möglichkeiten:

$$1)\ B_n = \frac{2}{cn\pi}\int_0^{\pi}(3sin(x)cos(x)\ sin(\frac{n\pi x}{L}))dx$$
$$\text{mit } L = \pi$$

$$2)\ 3sinxcosx = \frac{3}{2}sin(2x)$$
$$u_t(x,0) = \frac{3}{2}sin(2x) = sin(nx)\ c\ B_n\ cos(0)$$
$$\rightarrow Lösungfür\text{n=2}$$
$$B_2 = \frac{3}{2}\ \frac{1}{c}\ \frac{1}{n} = \frac{3}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$
$$B_n = 0 \text{ für } n \neq 2$$

Daraus folgt die Lösung:

$$u(x,t) = sin(2x)\ \frac{1}{4}\ sin(6t)$$

c) $u_{xx} = u_{tt}$, $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, $u(x,0) = 0$,
$u_t(x,0) = \begin{cases} \frac{3x}{\pi} & f\ddot{u}r\ 0 \ \leq \ x \ \leq \pi/3 \\ \frac{3(\pi - x)}{2\pi} & f\ddot{u}r\ \pi/3 \ \leq \ x \ \leq \ \pi \end{cases}$

$u_{xx} = u_{tt} \rightarrow$ c $= 1$

RB führen zur Lösung

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} sin(nx)(A_n cos(cnt) + B_n sin(cnt)$$

Aus AB:

$$u(x,0) = 0 = \sum_{k=1}^{\infty} sin(nx) A_n cos(0)$$
$$A_n = 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

$$u_t(x,0) = \begin{cases} \frac{3x}{\pi} & f\ddot{u}r\ 0 \ \leq \ x \ \leq \pi/3 \\ \frac{3(\pi - x)}{2\pi} & f\ddot{u}r\ \pi/3 \ \leq \ x \ \leq \ \pi \end{cases}$$
$$B_n = \frac{2}{cn\pi} \ \int_0^L g(x) sin(nx) \ dx$$
$$B_n = \frac{2}{n\pi} \ [ \ \int_0^{\pi/3} \frac{3x}{\pi} sin(nx) \ dx \ + \ \int_{\pi/3}^{\pi} \frac{3(\pi - x)}{2\pi} sin(nx) \ dx \ ]$$
$$B_n = \frac{2}{n\pi} \ [\frac{3\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right) - \pi n \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)}{\pi n^2} - \frac{3\sin(\pi n) - 3\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right) - 2\pi n \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)}{2\pi n^2} \ ]$$

So ergibt sich die Lösung

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_n sin(cnt) sin(nx)$$

## Aufgabe 94

Man löse folgende Wärmeleitungsprobleme:

Allgemein:

Wärmeleitungsgleichung: $u_t(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t)$

Ansatz: $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_n\ e^{-\frac{c^2 n^2 \pi^2 t}{L^2}}\ sin(\frac{n\pi x}{L})$

$B_n = \frac{2}{L}\ \int_0^L f(x)\ sin(\frac{n\pi x}{L})\ dx$ mit $f(x) = u(x,0)$

a) $u_t = u_{xx},\ \ u(0,t) = u(2,t) = 0,\ \ u(x,0) = \text{sin}2\pi x$

$u_t = u_{xx} \rightarrow \text{c} = 1$

Anfangsbedingung:

$$u(x,0) = sin(2\pi x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_n\ e^0\ sin(\frac{n\pi x}{L})$$

Lösung für $n = 4$: $B_4 = 1$

$B_n = 0$ für $n \neq 4$

Daraus folgt die Lösung des Wärmeleitungsproblems:

$$u(x,t) = 1\ e^{-\frac{16\pi^2 t}{4}} \text{sin}(2\pi x)$$
$$u(x,t) = e^{-4\pi^2 t}\ \ \text{sin}(2\pi x)$$

b) $u_t = u_{xx},\ \ u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ \ u(x,0) = x\ \text{sin}x$

$u_t = u_{xx} \rightarrow \text{c} = 1$

Ansatz:

$$u(x,0) = xsin(x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_n\ e^0\ sin(nx)$$

Koeffizientenvergleich nicht möglich, da $B_n$ keine Funktion von x ist
Aus $u(x,0) = xsin(x)$ folgt, dass $n = 1$

$$B_1 = \tfrac{2}{\pi}\ \int_0^{pi} xsinx\ sin(x)\ dx$$
$$B_1 = \tfrac{2}{\pi}\ \tfrac{\pi^2}{4}$$
$$B_1 = \tfrac{\pi}{2}$$
$$B_n = 0 \text{ für } n \neq 1$$

Daraus folgt die Lösung des Wärmeleitungsproblems:

$$u(x,t) = \tfrac{\pi}{2}\ e^{-t} \sin(x)$$